# Woche 3

CR- Zerlegung (Primzahlzerlegung: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$)

**Lemma 2.23:** Sei $A$ eine $m \times n$ Matrix mit Rang $r$ (Def. 2.9). Sei $C$ die $m \times r$ Untermatrix mit den unabh. Spalten. Dann gibt es eine eindeutige Matrix $R \in \mathbb{R}^{r \times n}$, so dass $\underbrace{A}_{m \times n} = \underbrace{C}_{m \times r} \cdot \underbrace{R}_{r \times n}$.

Beispiel mit $r = 1$. (Siehe Lemma 2.21):

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{R}$$

Beweis: $A$ und $C$ haben den gleichen Spaltenraum (Lemma 2.10) $\Rightarrow$ Spalte $v_j$ von $A$ ist eine Linearkombination der Spalten von $C$:

$$v_j = C x_j \quad , \quad x_j \in \mathbb{R}^r$$

Das heisst:

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} = C \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{R} = C R$$

$C$ hat linear unabh. Spalten (Korollar 1.20) $\Rightarrow$ Die Vektoren $x_1, x_2, \ldots x_n$ und somit auch $R$ sind eindeutig (Lemma 1.21).

# Beispiel $(r=2)$:

Example, $r=2$: columns of $A$

| Example, $r = 2$: | $\mathbf{v}_1$ | $\mathbf{v}_2$ | $\mathbf{v}_3$ | $\mathbf{v}_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A = \begin{bmatrix}1&2&0&3\\2&4&1&4\\3&6&2&5\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$ |
| $\mathbf{v}_1$ | $1\mathbf{v}_1$ | $2\mathbf{v}_1$ | | $3\mathbf{v}_1$ |
| $\mathbf{v}_2$ | | | | |
| $\mathbf{v}_3$ | | | $1\mathbf{v}_3$ | $-2\mathbf{v}_3$ |
| $\mathbf{v}_4$ | | | | |
| independent? | yes | no | yes | no |

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&2&0&3\\2&4&1&4\\3&6&2&5\end{bmatrix}}_{A,\ 3\times 4} = \underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\3&2\end{bmatrix}}_{C,\ 3\times 2}\underbrace{\begin{bmatrix}1&2&0&3\\0&0&1&-2\end{bmatrix}}_{R,\ 2\times 4}$$

Clicker : $v_4 = 2v_1 + v_3$

Wären $v_1, v_4$ linear abhängig (skalare Vielfache voneinander), wären auch $v_3, v_1$ linear abhängig.

## Matrizen und lineare Transformationen (2.3)

Matrix als „Transformation": $(m \times n)$

| Eingabe | Matrix | Ausgabe |
|---|---|---|
| $x \in \mathbb{R}^n$ | $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ | $Ax \in \mathbb{R}^m$ |

**Def.** 2.25 : Sei $A$ eine $m\times n$-Matrix. $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist die Funktion definiert durch

$$T_A(\underbrace{x}_{\in \mathbb{R}^n}) = \underbrace{Ax}_{\in \mathbb{R}^m}$$

Beispiel: $A = \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

$$T_A\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2\\x_1\end{bmatrix}$$ „Vertauschung"

Beob. 2.26: Sei $A$ eine $m\times n$ Matrix, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) $T_A(x+y) = T_A(x) + T_A(y)$

(ii) $T_A(\lambda x) = \lambda T_A(x)$.

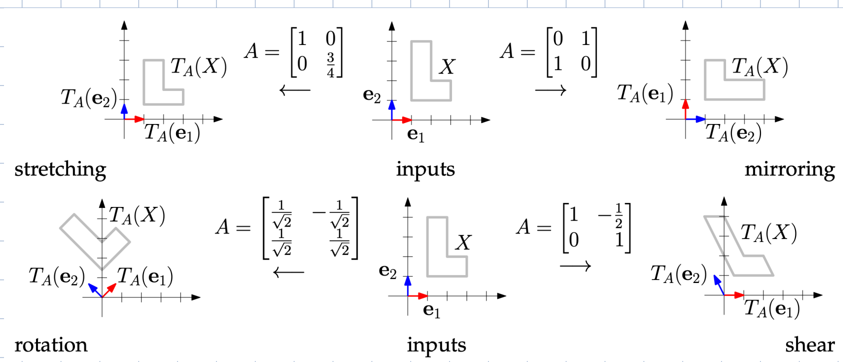
(i)+(ii): $T_A(\lambda x + \mu y) = \lambda T_A(x) + \mu T_A(y)$

Beweis: Zu prüfen: (i) $A(x+y) = Ax + Ay$; (ii) $A(\lambda x) = \lambda A x$. Beides gilt nach Regeln der Vektoraddition, Skalarmultiplikation, Matrix-Vektor-Multiplikation.

Transformation einer Menge $X$ von Eingaben:

$$T_A(X) := \{T_A(x) : x \in X\}$$

Beispiele ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$): „Verzerrung des Raums"

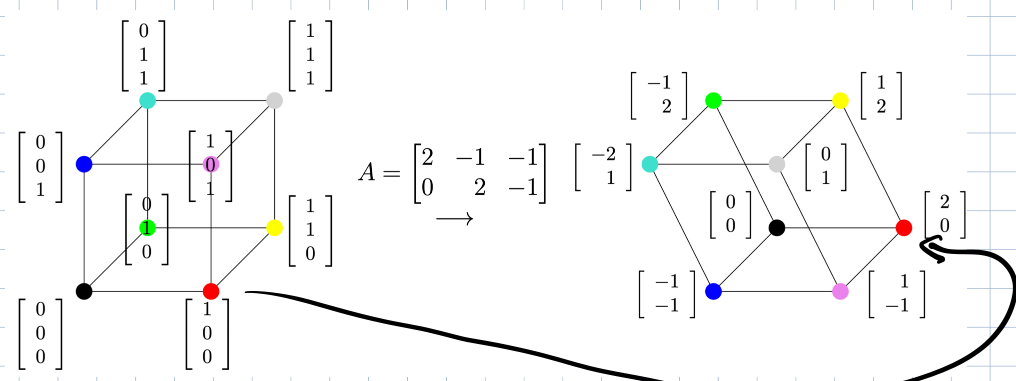



$T_A(e_1) = Ae_1$ : erste Spalte von $A$

$T_A(e_2) = A e_2$: zweite Spalte von $A$

Beispiel ($\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$): Orthogonale Projektion

Eingabe: 3-d Einheitswürfel; Ausgabe: 2-d Projektion:




$$\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\0 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$$

Lineare Transformation:

Def. 2.27: Eine Funktion $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heisst lineare Transformation, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die Folgenden zwei <u>Axiome</u> gelten:

(i) $T(x+y) = T(x) + T(y)$

(ii) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

(i)+(ii): $T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$.

Jedes $T_A$ ist eine lineare Transformation

„Kommutatives Diagramm": Jeder Weg führt zum gleichen Ergebnis.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{x},\mathbf{y} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "+"'] & T(\mathbf{x}),T(\mathbf{y}) \arrow[d, "+"] \\
\mathbf{x}+\mathbf{y} \arrow[r, "T"'] & T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T(\mathbf{x})+T(\mathbf{y})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{x} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\cdot\lambda"'] & T(\mathbf{x}) \arrow[d, "\cdot\lambda"] \\
\lambda\mathbf{x} \arrow[r, "T"'] & T(\lambda\mathbf{x}) = \lambda T(\mathbf{x})
\end{tikzcd}$$

Beispiele:      linear, weil $T = T_A$ für ....

- $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$   $A = [1\,1\,\overset{n}{\ldots}\,1]$   $\left( \underset{[1\,1\,\ldots\,1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}{\underset{\|}{Ax}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$,   $[1\,1\,\ldots\,1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i$

- $T(\underbrace{x}_{\in \mathbb{R}^n}) = 0 \in \mathbb{R}^m$   $A = 0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- $T(x) = x$   $A = I \quad (Ix = x)$

Gegenbeispiele:      Verletztes Axiom

- $T(x) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}_{1\text{-Norm}}$   (ii) Falls $x \neq 0$, $\lambda < 0$, dann ist $T(\lambda x) > 0$ aber $\underset{\lambda T(x) < 0}{\overset{\neq}{}}$

  $T(\lambda x) \neq \lambda T(x) < 0$

- $T(x) = u$, $u \neq 0$   (i): $T(x+y) = u$, aber $\underbrace{T(x)}_{u} + \underbrace{T(y)}_{u} = 2u$

Lemma 2.28: Sei $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Transformation, $x_1, x_2, \ldots x_\ell \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

nicht $n$

$$T\left(\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j T(x_j).$$

$\ell = 0$: $T(0) = 0$ (stimmt nach (ii): $T(0) = T(0\cdot 0) \overset{(ii)}{=} 0\cdot T(0) = 0$ )

$\ell = 1$: (ii)

$\ell = 2$: (i) + (ii)

$\ell > 2$ ? Nächstes Mal !

Beweis:
$$T\left(\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j x_j\right) = T\left(\sum_{j=1}^{\ell-1} \lambda_j x_j + \lambda_\ell x_\ell\right)$$
$$\overset{(i)}{=} T\left(\sum_{j=1}^{\ell-1} \lambda_j x_j\right) + T(\lambda_\ell x_\ell)$$
$$\overset{(ii)}{=} T\left(\sum_{j=1}^{\ell-1} \lambda_j x_j\right) + \lambda_\ell T(x_\ell).$$

Das gleiche für $\ell - 1$:

$$T\left(\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j x_j\right) = T\left(\sum_{j=1}^{\ell-2} \lambda_j x_j\right) + \lambda_{\ell-1} T(x_{\ell-1}) + \lambda_\ell T(x_\ell)$$

Wiederhole für $\ell - 2, \dots, 1$:

$$T\left(\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j x_j\right) = \underbrace{T\left(\sum_{j=1}^{0} \lambda_j x_j\right)}_{0} + \lambda_1 T(x_1) + \dots + \lambda_{\ell-1} T(x_{\ell-1}) + \lambda_\ell T(x_\ell)$$

$$= \lambda_1 T(x_1) + \dots + \lambda_{\ell-1} T(x_{\ell-1}) + \lambda_\ell T(x_\ell).$$
$$= \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j T(x_j)$$

Beweis per Induktion (ohne „Wiederholung"):

Für $\ell = 0$, direkter Beweis : $T(0) = 0$ ✓

Für $\ell > 0$, Induktionsschritt : $\underbrace{\text{wenn es für } \ell-1 \text{ gilt,}}_{\text{Induktionshypothese}}$ dann gilt es für $\ell$

Danach wissen wir: es gilt für alle $\ell$.

Induktionsschritt:

$$T\Big(\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j x_j\Big) \overset{(i),(ii)}{=} \underbrace{T\Big(\sum_{j=1}^{\ell-1} \lambda_j x_j\Big)}_{=} + \lambda_\ell T(x_\ell)$$

Induktionshypothese ⟶ $$= \underbrace{\sum_{j=1}^{\ell-1} \lambda_j T(x_j)} + \lambda_\ell T(x_\ell)$$

$$= \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j T(x_j).$$

Clicker: $A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$, Spalten sind linear abhängig

$\in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow 0$ ist nichttriviale Linearkombination.

$\underbrace{\text{Mit anderen Worten}}$: es gibt $x \neq 0 : Ax = 0$.

Matrix-Vektor Multiplikation = Linearkombination der Spalten

$$Ax := x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0$$

Die Matrix einer linearen Transformation:

Theorem 2.29: Sei $T: \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare

Transformation. Dann gibt es eine eindeutige $m \times n$ Matrix $A$, so dass $T = T_A$ (d.h. $T(x) = T_A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$)

Beweis: Für $T = T_A$ brauchen wir insbesondere

$$T(e_j) = T_A(e_j) = A e_j \quad (\text{Spalte } j \text{ von } A)$$

$e_j$: $j$-te Einheitsvektor, $j = 1, \dots n$.

Einzige Kondidation für $A$:

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(e_1) & T(e_2) & \dots & T(e_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Die funktioniert! Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$T_A(x) \underset{\text{Def. 2.25}}{=} Ax \underset{\text{Def. 2.4 (Matrix-Vektor-Multiplikation)}}{=} \sum_{j=1}^{n} x_j T(e_j)$$

$$\xrightarrow{\text{Lemma 2.28}} = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = T(x).$$

z. B.

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x}$$

Lineare Transformationen und Matrixmultiplikation

Lemma 2.30: Seien $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^a$ und $T_B : \mathbb{R}^b \to \mathbb{R}^n$ zwei lineare Transformationen. Dann gilt:

$$T_A(T_B(x)) = T_{AB}(x), \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^b.$$

Beweis: $T_A(T_B(x)) = A(Bx) = (AB)x = T_{AB}(x).$

Assoziativität

# Lineare Gleichungssysteme (3.1)

Alterspuzzle (0.3): | Standardform
--- | ---
$D = 2S$ | $x_1 - 2x_2 = 0$
$D = C + 3$ | $x_1 - x_3 = 3$
$D + S + C = 17$ | $x_1 + x_2 + x_3 = 17$
 | $(x_1 = D;\ x_2 = S;\ x_3 = C)$

Def. 3.1 Ein lineares Gleichungssystem in $m$ Gleichungen und $n$ Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist von der Form

$$Ax = \mathbf{b}: \quad \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A,\ m\times n}}_{\text{Koeffizientenmatrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} = \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m}}_{\text{rechte Seite}}$$

Vektor der Variablen

Gleichung $i$: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$

Die $a_{ij}$ und $b_i$ stehen für bekannte reelle Zahlen.

Die $x_j$ stehen für unbekannte reelle Zahlen.

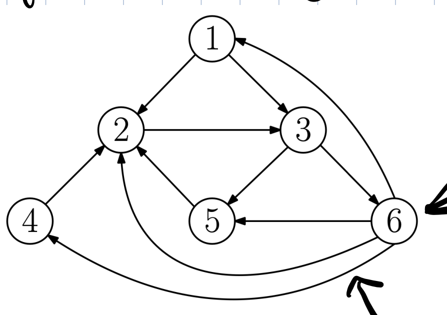
Lösen des Gleichungssystems: finde $x \in \mathbb{R}^4$, so dass $Ax = b$ gilt.

Alterspuzzle: $$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}}_{b}$$

Beobachtung 3.2: Sei $A$ eine $m \times n$ Matrix. Die Spalten von $A$ sind linear unabhängig gdw das System $Ax = 0$ eine eindeutige Lösung hat ($x = 0$).

Beweis: eindeutige Lösung $\Leftrightarrow$ 0 kann nur als triviale Linearkombination ($Ax$) der Spalten geschrieben werden. $\Leftrightarrow$ Die Spalten sind linear unabhängig (Lemma 1.19).

Anwendung: Page Rank (Google)




Link-Graph

Seite

Link (von 6 auf 4)

Welche Seite ist am relevantesten?

Mass alter Schule: Anzahl **Zitate** (Seite 2 mit 4 Zitaten gewinnt).

PageRank-Prinzipien:

- Zitate von relevanten Seiten zählen mehr
- Zitate von Seiten, die viele Seiten zitieren, zählen weniger.

Relevanz: Summe der Relevanzen der zitierenden Seiten, jeweils geteilt durch die Anzahl der Seiten, die sie zitiert:

$$x_2 = \frac{x_1}{2} + x_4 + x_5 + \frac{x_6}{4}$$

(analog für die anderen Seiten).

System von 6 linearen Gleichungen in 6 Variablen!
Leider mit nutzloser Lösung $x = 0$.
Fix: Dämpfungsfaktor $d$ nahe an 1 (z. B. $d = \frac{7}{8}$):

$$x_2 = (1-d) + d\left(\frac{x_1}{2} + x_4 + x_5 + \frac{x_6}{4}\right).$$

Eindeutige Lösung! (Für $d = \frac{7}{8}$)

$x_1 = 0.31797, x_2 = 1.6761, x_3 = 1.7307, x_4 = 0.31797, x_5 = 1.0751, x_6 = 0.88217$

Seite 3 gewinnt!